

§7. Nekonečné řady

Def.: Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Číslo

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i, \quad n \in \mathbb{N}$$

nazýváme n -tým částečným součtem posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nazýváme posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Nekonečnou řadou (číselnou) nazýváme posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme stručně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots).$$

Čísla a_n , $n = 1, 2, \dots$ nazýváme členy řady, čísla S_n , $n = 1, 2, \dots$ nazýváme částečné součty řady.

((((Přesněji: Uspořádanou dvojici $(\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{S_n\}_{n=1}^{\infty})$ nazýváme nekonečnou řadou (číselnou) utvořenou z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a značíme stručně

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots). \quad)))$$

Pozn.: Symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ označujeme jak nekonečnou řadu, tak její součet.

Def.: Má-li posloupnost částečných součtů $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ limitu S ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$), řekneme, že nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a číslo S nazveme jejím součtem (zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$).

Je-li $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupností divergentní, řekneme, že nekonečná řada diverguje.

Pozn.: a) Chováním řady budeme rozumět to, zda řada konverguje či diverguje.

b) Někdy se rozlišují 2 možnosti divergence řady (posloupnosti):

1. Řada diverguje, jestliže má nevlastní limitu ($\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$).
2. Řada osciluje, jestliže $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní ani nevlastní limitu.

Pozn.: a) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní, pak také řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

b) Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentní, může být řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní i konvergentní.

V.7.1.: Necht' je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Pozn.: Podmínka $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ je podmínka pouze nutná, nikoliv postačující pro konvergenci dané řady, tedy V.7.1. nelze obrátit. (Např. harmonická řada

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, ale řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje – dokážeme po zavedení srovnávacího kritéria konvergence.)

V.7.2.: Dvě řady lišící se pouze v konečném počtu členů se chovají stejně (i když mohou mít jiné částečné součty i jiný součet), zejména se chování řady nezmění, jestliže z ní vyškrtáme konečně mnoho členů, přidáme k ní konečně mnoho členů nebo změníme konečně mnoho členů.

V.7.3.: a) Jestliže konvergují řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, pak konvergují i řady $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

b) Jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n$, $c \in \mathbb{R}$ a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Pozn.: a) Jestliže z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje pouze jedna, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ nekonverguje, chová se jako druhá řada.

b) Nekonverguje-li žádná z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, může jejich součet konvergovat.
(Např. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-n)$ - jejich součet konverguje k nule.)

§8. Řady s nezápornými členy

Pozn.: V tomto paragrafu budeme studovat řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$. Posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je tedy neklesající a ke konvergenci takové řady podle V.6.2. stačí, aby byla posloupnost $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ shora omezená.

V.8.1.: Srovnávací kritérium konvergence

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy s vlastností $\forall n \in \mathbb{N}$:

$0 \leq a_n \leq b_n$, pak platí:

1. Konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, tak konverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. Diverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tak diverguje také $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Def.: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ z V.8.1. se nazývá majoranta řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

V.8.2.: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ konverguje $\Leftrightarrow a > 1, a \in \mathbb{R}^+$.

V.8.3.: Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou řady s kladnými čísly. Nechť $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$, pak platí:

1. $c \neq 0 \wedge c \neq \infty \Rightarrow$ řady se chovají stejně – obě konvergují nebo divergují,
2. $c = 0 \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje,
3. $c = \infty \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverguje $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

§9. Nekonečná geometrická řada

Def.: Nekonečnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická posloupnost s kvocientem q , nazýváme nekonečnou geometrickou řadou.

Číslo q nazýváme kvocientem geometrické řady.

V.9.1.: Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je geometrická řada s kvocientem q , kde $|q| < 1$. Pak je tato řada konvergentní a má součet $S = \frac{a_1}{1-q}$.

[Dk.:]

Pozn.: Chování nekonečné geometrické řady, $a_1 \neq 0$:

- a) $-1 < q < 1$... řada konverguje,
- b) $q \geq 1$... řada diverguje,
- c) $q \leq -1$... řada osciluje.

Pozn.: Každé reálné číslo je limitou jisté neklesající posloupnosti racionálních čísel.

Např.: Eulerovo číslo $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$